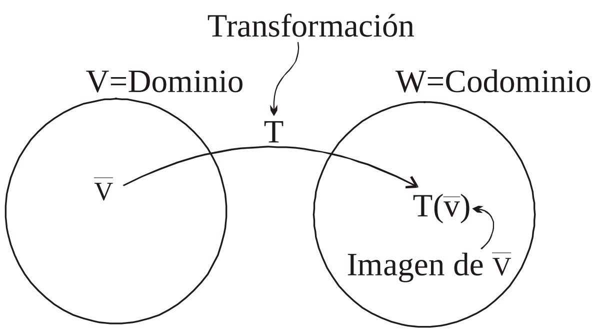
1. ¿QUÉ ES UNA TRANSFORMACIÓN?

En términos generales, una transformación es una *función* que permite transformar un vector que pertenece a un espacio vectorial (dominio) en otro vector que pertenece a otro espacio vectorial (codominio). Por esta razón, dicha función es una *función vectorial de variable vectorial*, es decir, depende de *vectores*, y es del tipo $\overline{w} = f\left(\overline{v}\right)$.

Una transformación se representa como T: $V \rightarrow W$, donde V es el "*dominio*" y W el "*codominio*" de la transformación T.

Esquemáticamente:



2. PROPIEDADES PARA QUE UNA TRANSFORMACIÓN SEA LINEAL

De las distintas transformaciones que existen, en este curso solamente se estudian las denominadas "*transformaciones lineales*".

Para que una *transformación* sea *lineal*, ésta debe satisfacer las propiedades dadas en la siguiente definición. Si V y W son espacios vectoriales definidos sobre un campo K, la transformación T:$V \rightarrow W$ es *lineal* si cumple con:

1.- *Superposición*.- La imagen de la suma de dos vectores es igual a la suma de las imágenes de dichos vectores:

$$T\left(\overline{v_1} + \overline{v_2}\right) = T\left(\overline{v_1}\right) + T\left(\overline{v_2}\right) \qquad \forall \ \overline{v_1}, \ \overline{v_2} \in V$$

2.- *Homogeneidad*.- La imagen del producto de un escalar por un vector es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector:

$$T\left(\alpha \overline{v_1}\right) = \alpha \cdot T\left(\overline{v_1}\right) \qquad \forall \ \alpha \in K$$

Un ejemplo de una transformación lineal T:$R^3 \rightarrow R^2$, es la definida por:

$$T(x, y, z) = (2x, 2y)$$

puesto que cumple con ambas propiedades.

En la transformación anterior, si $\overline{u} = (x, y, z)$ es un vector que pertenece al dominio R^3, entonces el vector $T\left(\overline{u}\right) = (2x, 2y)$ es un vector que pertenece al codominio R^2 y que se denomina la "*imagen*" de $\overline{u}$.

Toda transformación lineal T:$V \rightarrow W$ tiene la propiedad de que la imagen del vector cero del dominio es igual al vector cero del codominio, es decir: $T\left(\overline{0}_V\right) = \overline{0}_W$.

3. NÚCLEO DE UNA TRANSFORMACIÓN

Se denomina el *núcleo de una transformación* al conjunto de vectores cuya imagen es el vector cero del codominio. Es decir, si T: $V \rightarrow W$ es una transformación con dominio V y codominio W, entonces el *núcleo* está dado por el siguiente conjunto:

$$N(T) = \left\{ \overline{v} \in V \;\middle|\; T(\overline{v}) = \overline{0}_W \right\}$$

El *núcleo* es un *subconjunto del dominio*. Además, cuando la transformación es lineal, el *núcleo* es un *subespacio vectorial del dominio*.

El procedimiento para obtener el núcleo $N(T)$ de una transformación T: $V \rightarrow W$ es:

- Proponer un vector $\bar{v}$ que pertenezca al dominio *V*.
- Calcular la imagen $T(\bar{v})$ del vector $\bar{v}$ anterior e igualarla con el vector cero del codominio, es decir: $T(\bar{v}) = \bar{0}_W$.
- Comparar uno a uno los términos de la igualdad anterior para determinar la forma específica del vector $\bar{v}$ propuesto inicialmente. Como puede deducirse, esta comparación o igualdad origina una o varias ecuaciones lineales homogéneas (dependiendo de los espacios vectoriales estudiados) que al ser resueltas permiten determinar la forma específica del vector $\bar{v}$ buscado, que es el vector genérico que constituye el núcleo y que finalmente debe escribirse como $N(T) = \left\{ \bar{v} \in V \right\}$.

Núcleo de la transformación *T*

4. RECORRIDO DE UNA TRANSFORMACIÓN

Se denomina el *recorrido de una transformación* al conjunto de todos los vectores que son imagen de algún vector del dominio. Es decir, si *T*:*V*→*W* es una transformación donde *V* es el dominio y *W* es el codominio, entonces el *recorrido* está dado por el siguiente conjunto:

$$T(V) = \left\{ T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \right\}$$

El *recorrido* es un *subconjunto del codominio*. Además, cuando la transformación es lineal, el *recorrido* es un *subespacio vectorial del codominio*.

Para determinar el recorrido de una transformación lineal, se aplica el siguiente teorema:

Sea *T*: *V* → *W* una transformación lineal. Si $B = \left\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \right\}$ es una base del dominio *V*, entonces el siguiente conjunto $CG = \left\{ T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), ..., T(\bar{v}_n) \right\}$ es un conjunto generador del recorrido $T(V)$.

El procedimiento para obtener el recorrido $T(V)$ de una transformación *T*: *V* → *W* es:

- Determinar una base del dominio *V* (por facilidad la base canónica), denominada:

$$B_{can}\ de\, V = \left\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \right\}$$

- Obtener las imágenes $T(\bar{v})$ de los vectores de la base canónica anterior; las cuales constituirán el conjunto generador del recorrido:

$$CG = \left\{ T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), ..., T(\bar{v}_n) \right\}$$

- Si se determina el "*espacio renglón*" de la matriz cuyos renglones son los vectores del conjunto *CG* anterior, se obtiene el recorrido $T(V)$ de la transformación *T*. Es decir:

1. Transformar a la matriz mencionada a su *forma canónica escalonada*, en la cual, los renglones diferentes de cero constituyen los vectores de la base canónica del recorrido $B_{can}\ de\, T(V) = \left\{ \bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n \right\}$.
2. Determinar un vector genérico $\bar{w}$, escribiéndolo como combinación lineal de los vectores de la base canónica anterior: $\bar{w} = \alpha_1 \bar{c}_1 + \alpha_2 \bar{c}_2 + ... + \alpha_n \bar{c}_n$.
3. Dicho vector genérico, es el que indica la *forma general* del recorrido; conocido éste, sólo basta con expresarlo como un conjunto $T(V) = \left\{ \bar{w} \in W \right\}$.

Recorrido de la transformación *T*

5. TEOREMA IMPORTANTE RESPECTO A LA DIMENSIÓN DEL RECORRIDO Y DEL NÚCLEO

Si V es un espacio de dimensión finita, y $T{:}V\rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces:

$$\dim V = \dim T(V) + \dim N(T)$$

dimensión del dominio = dimensión del recorrido + dimensión del núcleo

6. MATRIZ ASOCIADA CON UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

La "*representación matricial*" de una transformación lineal $T{:}V\rightarrow W$ es muy útil en lo que se refiere a la obtención de la imagen de un vector; ya que con sólo multiplicar la matriz asociada con la transformación por un vector del dominio, se obtiene la imagen del mismo en el codominio. Lo más importante, es que con este mismo procedimiento, también es posible determinar la "regla de correspondencia" de una transformación lineal, si de ella sólo se conoce su matriz asociada y los espacios vectoriales a los que está referida.

La representación matricial de una transformación lineal depende de las bases que se utilicen para ello. La más sencilla de dichas representaciones es la matriz asociada que se obtiene con la base canónica del dominio, como se explica enseguida.

Para determinar la matriz asociada $M(T)$ con una transformación lineal $T{:}V\rightarrow W$, el procedimiento es:

- Determinar la base canónica del dominio.
- Calcular las imágenes de los vectores de la base canónica anterior.
- Las imágenes anteriores, expresadas en la forma de columnas, constituyen las columnas de la matriz asociada $M(T)$ con la transformación $T{:}V\rightarrow W$.

Como ya se mencionó antes, la matriz asociada $M(T)$ con la transformación $T{:}V\rightarrow W$, permite obtener la imagen $T\left(\bar{v}\right)$ de cualquier vector $\bar{v}$ del dominio V con la expresión:

$$T\left(\bar{v}\right) = M\,(T)\ \left(\bar{v}\right)$$

7. MATRIZ ASOCIADA CON UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Y REFERIDA A DOS BASES A Y B CUALESQUIERA

La teoría anterior puede generalizarse al caso en el que el dominio y el codominio tienen bases A y B cualesquiera, respectivamente. Es decir, si $T{:}V\rightarrow W$ es una transformación lineal donde V y W son espacios vectoriales de dimensión finita (dominio y codominio, respectivamente), y $A=\left\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\right\}$ y $B=\left\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_m\right\}$ son bases de V y W, respectivamente. Entonces existe una y sólo una matriz $M_B^A(T)$ asociada con la transformación T, tal que:

$$\left[T\left(\bar{v}\right)\right]_B = M_B^A\,(T)\ \left(\bar{v}\right)_A \qquad \forall\ \bar{v} \in V$$

donde las n columnas de dicha matriz son los vectores de coordenadas:

$$\left[T\left(\bar{v}_1\right)\right]_B, \left[T\left(\bar{v}_2\right)\right]_B, ..., \left[T\left(\bar{v}_n\right)\right]_B$$

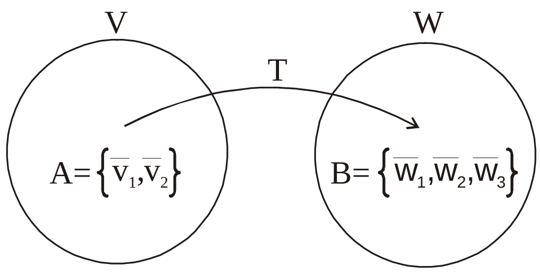
la nomenclatura anterior significa:

$M_B^A(T)$ = Matriz asociada con la transformación T y referida a las bases A y B.

$\left(\bar{v}\right)_A$ = Vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base A, donde $\bar{v} \in$ dominio.

$\left[T\left(\bar{v}\right)\right]_B$ = Vector de coordenadas de $T\left(\bar{v}\right)$ en la base B, donde $T\left(\bar{v}\right) \in$ codominio y es la imagen de $\bar{v}$.

Un ejemplo esquemático puede ser:



Si la dimensión n del dominio V y, m del codominio W son diferentes, entonces la matriz $M_B^A(T)$ es de orden $m\times n$. Contrariamente, cuando sus dimensiones son iguales, dicha matriz es una matriz cuadrada de orden $n\times n$.

<u>Procedimiento para determinar la matriz $M_B^A(T)$ asociada con la transformación $T:V\rightarrow W$:</u>

- Obtener las imágenes de los vectores de la base $A=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,...,\overline{v}_n\}$; es decir, determinar: $T(\overline{v}_1),T(\overline{v}_2),...,T(\overline{v}_n)$.
- Expresar a cada una de las imágenes anteriores, como una combinación lineal de los vectores de la base $B=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2,...,\overline{w}_m\}$; esto es:

$$T(\overline{v}_1)=\alpha_1\overline{w}_1+\alpha_2\overline{w}_2+...+\alpha_m\overline{w}_m$$

$$T(\overline{v}_2)=\beta_1\overline{w}_1+\beta_2\overline{w}_2+...+\beta_m\overline{w}_m\text{, etc.}$$

- De las combinaciones lineales anteriores, determinar los vectores de coordenadas

$$\left[T(\overline{v}_1)\right]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\...\\\alpha_m\end{bmatrix},\quad \left[T(\overline{v}_2)\right]_B=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\...\\\beta_m\end{bmatrix},\quad \text{etc.}$$

- Los vectores de coordenadas anteriores, constituyen las columnas de la matriz buscada $M_B^A(T)$.

<u>Procedimiento para determinar la regla de correspondencia (imagen) de una transformación lineal</u>

CASO PARTICULAR: donde los datos son la matriz $M_B^A(T)$ y las bases A y B, y se desea conocer la regla de correspondencia de la transformación $T:V\rightarrow W$:

- Se propone un vector $\overline{v}$ que represente a los vectores del dominio en estudio.
- Se escribe dicho vector $\overline{v}$ como una combinación lineal de los vectores de la base A, para determinar el vector de coordenadas $(\overline{v})_A$.
- Se realiza la multiplicación $\left[T(\overline{v})\right]_B=M_B^A(T)\ (\overline{v})_A$ para obtener el vector de coordenadas de $T(\overline{v})$ en la base B.
- Conocido dicho vector de coordenadas, $\left[T(\overline{v})\right]_B$, se escribe como combinación lineal de los vectores de la base B, con la finalidad de obtener la regla de correspondencia o imagen, $T(\overline{v})$, buscada.

NOTA: La determinación de la regla de correspondencia de una transformación lineal cualquiera con el procedimiento anterior, puede aplicarse en todos los casos en los que se cuente con la representación matricial de dicha transformación (referida a dos bases o referida a una sola base; en álgebra de transformaciones lineales; en transformaciones inversas; con valores y vectores característicos; etc.).

8. TEOREMA IMPORTANTE RESPECTO AL RANGO DE UNA MATRIZ

Si $T:V\rightarrow W$ es una transformación lineal, y A y B son dos bases de V y W, respectivamente; entonces:

$$R\left[M_B^A(T)\right]=\dim T(V)$$

Rango de la matriz $M_B^A(T)$ = dimensión del recorrido $T(V)$

NOTA: El rango de una matriz cualquiera, es el número de renglones distintos de cero de dicha matriz llevada a su forma escalonada.

9. MATRIZ ASOCIADA CON UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Y REFERIDA A UNA BASE *A*

Cuando se tiene una transformación del tipo $T:V\to V$, conocida como operador lineal y donde el dominio es igual al codominio, lo usual es considerar una sola base A para el espacio V, y la matriz $M_A^A(T)$ se llama "matriz asociada con T y referida a la base A". Si se multiplica ésta matriz por el vector de coordenadas $(\bar{v})_A$ de un vector $\bar{v}\in V$ en la base A, se obtiene el vector de coordenadas $\left[T(\bar{v})\right]_A$ de la imagen de este vector $T(\bar{v})$ en la base A, es decir, esta multiplicación es de la forma:

$$\left[T(\bar{v})\right]_A = M_A^A(T)\ (\bar{v})_A$$

Para la transformación lineal $T:V\to V$, la matriz $M_A^A(T)$ referida a una base A, se obtiene como sigue:

- Determinar las imágenes de los vectores de la base $A=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_n\}$; es decir, determinar: $T(\bar{v}_1),T(\bar{v}_2),\ldots,T(\bar{v}_n)$.
- Expresar cada una de las imágenes anteriores, como una combinación lineal de los vectores de la base A; es decir:

$$T(\bar{v}_1)=\alpha_1\bar{v}_1+\alpha_2\bar{v}_2+\ldots+\alpha_n\bar{v}_n$$

$$T(\bar{v}_2)=\beta_1\bar{v}_1+\beta_2\bar{v}_2+\ldots+\beta_n\bar{v}_n, \text{ etc.}$$

- De las combinaciones lineales anteriores, determinar los vectores de coordenadas:

$$\left[T(\bar{v}_1)\right]_A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{bmatrix},\quad \left[T(\bar{v}_2)\right]_A=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \ldots\\ \beta_n\end{bmatrix},\quad \text{etc.}$$

- Los vectores de coordenadas anteriores, constituyen las columnas de la matriz buscada $M_A^A(T)$.

NOTA: Puesto que, la dimensión del dominio es igual a la dimensión del codominio, la matriz $M_A^A(T)$ siempre es una matriz cuadrada de orden $n\times n$.

10. ÁLGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Puesto que las transformaciones lineales son funciones vectoriales, las operaciones algebraicas que se realizan para otro tipo de funciones (como polinómicas, exponenciales, trigonométricas, etc.), también pueden realizarse entre transformaciones lineales, como se indica en lo que sigue.

Existen tres operaciones algebraicas elementales que se realizan entre transformaciones lineales, éstas son:

- Suma de transformaciones.
- Multiplicación de un escalar por una transformación.
- Composición de transformaciones.

<u>a) Suma entre transformaciones y multiplicación de una transformación por un escalar:</u>

Si S y T son dos transformaciones lineales de V en W, y K es el campo sobre el cual está definido el espacio W:

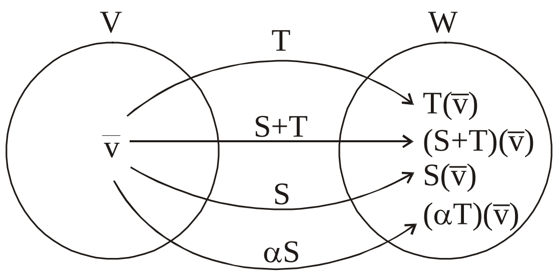
- La suma $S+T$ es una transformación (también lineal) de V en W de la forma:

$$(S+T)\ (\bar{v})=S(\bar{v})+T(\bar{v})\ \ \forall\ \bar{v}\in V$$

- El producto de un escalar $\alpha \in K$ por la transformación lineal S, es una transformación lineal de V en W de la forma:

$$(\alpha S)(\bar{v}) = \alpha S(\bar{v}) \quad \forall\, \bar{v} \in V; \forall\, \alpha \in K$$

Esquemáticamente:



<u>Relación entre las operaciones algebraicas anteriores y las operaciones con matrices:</u>

- Para matrices asociadas con las transformaciones lineales $S{:}V\to W$ y $T{:}V\to W$, respectivamente:

$$M(S+T) = M(S) + M(T)$$
$$M(\alpha S) = \alpha\, M(S)$$

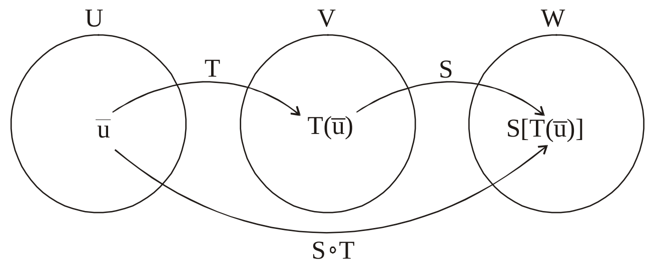
- Para matrices asociadas con las transformaciones lineales $S{:}V\to W$ y $T{:}V\to W$ y referidas a dos bases A y B, que pertenecen al dominio y al codominio, respectivamente:

$$M_B^A(S+T) = M_B^A(S) + M_B^A(T)$$
$$M_B^A(\alpha S) = \alpha\, M_B^A(S)$$

<u>b) Composición de transformaciones:</u>

En contraste con los conceptos estudiados anteriormente, en donde se trabajó con uno (V) o dos espacios vectoriales (V y W), en la composición de transformaciones se trabaja con tres espacios vectoriales (U, V y W) a la vez.

La composición de dos transformaciones lineales S y T, simbolizada como $S \circ T$ y que se lee: "S *composición* T", permite transformar directamente un vector $\bar{u}$ que pertenece a un primer espacio vectorial U, en otro vector $S\left[T(\bar{u})\right]$ que pertenece a un tercer espacio vectorial W. Esquemáticamente:



Es decir, si $T{:}U\to V$ y $S{:}V\to W$ son dos transformaciones lineales, la composición $S \circ T$ es una transformación (también lineal) de U en W, definida por:

$$(S \circ T)(\bar{u}) = S\left[T(\bar{u})\right] \quad \forall\, \bar{u} \in U$$

NOTA: La composición *no es* una operación *conmutativa*:

- A veces resulta que $S \circ T \neq T \circ S$.
- En otros casos, existe $S \circ T$, pero no existe $T \circ S$.

<u>Relación entre la composición de transformaciones y las operaciones con matrices:</u>

- Para matrices asociadas con las transformaciones lineales $T{:}U\to V$ y $S{:}V\to W$:

$$M(S \circ T) = M(S)M(T)$$

o bien:

$$M(T \circ S) = M(T)\,M(S)$$

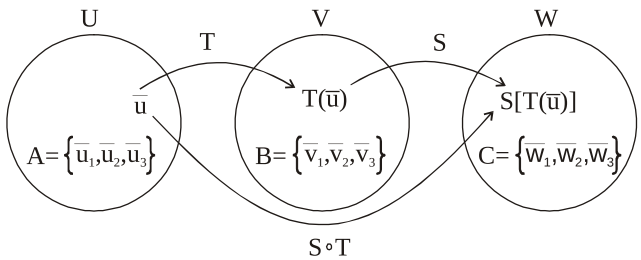
Puesto que la composición no es una operación *conmutativa*, se remarca que:

$$M(S \circ T) \neq M(T \circ S)$$

- Para matrices asociadas con las transformaciones lineales $T{:}U\to V$ (referida a las bases A y B) y $S{:}V\to W$ (referida a las bases B y C), se tiene:

$$M_C^A(S \circ T) = M_C^B(S)\, M_B^A(T)$$

Esquemáticamente:



Teorema referido a las propiedades de la composición: Si U, V, W y X son espacios vectoriales sobre un campo K; y F, G, H, S y T son transformaciones lineales cualesquiera entre los espacios vectoriales siguientes:

$F: U \to V$
$G: U \to V$
$H: W \to X$
$S: V \to W$
$T: V \to W$

Entonces:

1. $S \circ (F + G) = (S \circ F) + (S \circ G)$
2. $(S + T) \circ F = (S \circ F) + (T \circ F)$
3. $\alpha(S \circ F) = (\alpha S) \circ F = S \circ (\alpha F) \;\; \forall \;\; \alpha \in K$
4. $H \circ (S \circ F) = (H \circ S) \circ F$
5. $(T \circ I_V) = T$; $(I_W \circ T) = T$, donde I_V e I_W son las transformaciones identidad en los espacios V y W, respectivamente.

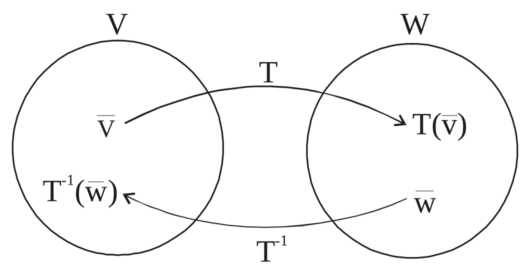
11. INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

A diferencia de los temas estudiados con anterioridad, en los que conocido un vector se determinaba su imagen, en este caso, se estudia: cómo obtener un vector si de él se conoce su imagen; en otras palabras, determinar la regla de correspondencia inversa de una transformación.

Si $T{:}V \to W$ es una transformación lineal cualquiera de V en W; se llama la inversa de T (se representa como T^{-1}), a una transformación de W en V, tal que:

$$T^{-1}\left[T(\bar{v})\right] = \bar{v} \quad \forall\ \bar{v} \in V = \text{Dominio}$$
$$T\left[T^{-1}(\bar{w})\right] = \bar{w} \;\; \forall \;\; \bar{w} \in W = \text{Codominio}$$

Esquemáticamente:



NOTA: 1) La inversa de una transformación es única. 2) No todas las transformaciones tienen inversa.

Los diversos teoremas que permiten determinar bajo qué condiciones la inversa de una transformación lineal existe, se presentan a continuación.

TEOREMA: Si $T{:}V \to W$ es una transformación lineal, la inversa de T existe si y sólo si T es *biyectiva*. Una tranformación $T{:}V \to W$ es biyectiva si:

- Es "uno a uno", es decir, que todos los vectores del dominio tienen diferentes imágenes una vez aplicada la transformación.
- Es "sobre", es decir, que todos los vectores del codominio son imagen de algún vector del dominio una vez aplicada la transformación.

TEOREMA: Si $T{:}V \to W$ es una transformación lineal, la inversa de T existe si y sólo si:

- dim V = dim W (la dimensión del dominio es igual a la dimensión del codominio).

- $N(T)=\{\bar{0}_V\}$(el núcleo de la transformación T es igual al vector cero del dominio V).

NOTA: Las dos condiciones anteriores son equivalentes a que la matriz asociada con la transformación T y referida a las bases A y B, sea cuadrada y no singular (esto es, con det ≠ 0). En otras palabras: la transformación T tiene inversa, si y sólo si la matriz $M_B^A(T)$ tiene inversa.

TEOREMA: Si $T:V\to W$ es una transformación lineal, y A y B son bases de V y W, respectivamente, se cumple:

1. T^{-1} existe si y sólo si, $M_B^A(T)$ tiene inversa (es no singular).

2. Si T^{-1} existe, entonces: $M_A^B\left(T^{-1}\right)=\left[M_B^A(T)\right]^{-1}$

Este último teorema también se aplica al caso en el que se tiene una matriz asociada con una transformación del tipo $M(T)$, es decir que, la transformación T^{-1} existe, si la matriz $M(T)$ tiene inversa, con lo cual, se tiene que: $M\left(T^{-1}\right)=\left[M(T)\right]^{-1}$.

De los teoremas anteriores, se puede concluir que, para determinar T^{-1} de una transformación T (una vez que se sabe que ésta existe) sólo basta con calcular alguna de sus matrices asociadas (la que sea posible dependiendo del problema estudiado) y de ella determinar su matriz inversa, para finalmente, obtener la regla de correspondencia de T^{-1} de acuerdo con los lineamientos estudiados en la parte de representación matricial de transformaciones lineales. NOTA: Por supuesto que cualquiera de estas matrices asociadas que se utilice, permite llegar a la misma transformación inversa T^{-1}, ya que ésta es única.

12. VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

Los vectores y valores característicos se determinan en las transformaciones lineales conocidas como "operadores lineales" del tipo $T:V\to V$, es decir, que van de un espacio vectorial al mismo espacio vectorial.

Algunos otros nombres utilizados para estos mismos conceptos son: eigenvectores y eigenvalores; vectores y valores propios; autovectores y autovalores; etc.

En términos generales, un "*vector característico*" es aquel vector que no se modifica al aplicar la transformación lineal o cuya modificación consiste únicamente en quedar multiplicado por cierto escalar, al cual se le conoce como "*valor característico*". Es decir, si para el operador lineal $T:V\to V$ (donde V es un espacio vectorial sobre el campo K) existe un vector $\bar{v}\in V$, $\bar{v}\neq 0$, tal que: $T\left(\bar{v}\right)=\lambda\bar{v}$, se dice que λ es un valor característico de T y $\bar{v}$ es un vector característico de T.

NOTA: 1) Un operador lineal $T:V\to V$ puede tener diversos valores característicos $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, y por consiguiente diversos vectores característicos $\bar{v}_1,\bar{v}_2,...,\bar{v}_n$ correspondientes a dichos valores. Cuando esto ocurre, si $\lambda_i\neq\lambda_j\ \forall\, i\neq j$, entonces el conjunto $\left\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,...,\bar{v}_n\right\}$ es linealmente independiente.
2) Todas las representaciones matriciales de un operador lineal T, tienen el mismo polinomio característico, y por consiguiente, los mismos valores característicos.

Procedimiento para determinar valores, vectores y espacios característicos:

1. Se obtiene la matriz asociada $M(T)$ con el operador lineal $T:V\to V$ en estudio. Dicha matriz

se conoce como "*A*" y está referida a una misma base (que por simplicidad es generalmente, la base canónica).

2. Se determina la matriz "$A-\lambda I$", donde:
   A=*M*(*T*)=Matriz asociada con el operador lineal
   I=Matriz identidad
   λ=Raíz del polinomio característico
3. Se obtiene el *polinomio característico* con: $\det\left(A-\lambda I\right)$.
4. Al resolver la *ecuación característica* $\det\left(A-\lambda I\right)=0$, se determinan los *valores característicos* del operador lineal *T*.
5. Resolviendo el sistema homogéneo $\left(A-\lambda I\right)\overline{v}=\overline{0}$, se determinan los *vectores característicos* $\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}$ correspondientes a cada *valor característico* $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ obtenido en el inciso anterior.
6. Finalmente, cada *espacio característico* está constituido por los vectores característicos $\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}$, respectivamente, es decir:

$$E(\lambda_1)=\left\{\overline{v_1}\right\},\ E(\lambda_2)=\left\{\overline{v_2}\right\},\ .\ .\ .\ .\ ,\ E(\lambda_n)=\left\{\overline{v_n}\right\}$$

NOTA: Los espacios característicos del operador lineal T:$V\rightarrow V$ son subespacios vectoriales de *V*.

13. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DIAGONAL DE UN OPERADOR Y MATRIZ DIAGONALIZADORA

A diferencia de las representaciones matriciales que se estudiaron con anterioridad y que se referían a transformaciones del tipo T:$V\rightarrow W$, en este tema se estudia la representación matricial para operadores lineales del tipo T:$V\rightarrow V$, en particular, las matrices diagonales, que se consideran entre las matrices asociadas con un operador lineal más sencillas que existen.

Se dice que un operador lineal T:$V\rightarrow V$ tiene una "representación matricial diagonal *D*" (referida a una misma base), cuando existen los valores característicos λ_i necesarios que permitan obtener una matriz del tipo:

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Una "matriz diagonalizadora *P*", es aquella cuyas columnas son los vectores característicos $\overline{v_i}$, que constituyen un conjunto linealmente independiente que, además, es una "base del espacio vectorial *V*" al que se refiere el operador lineal T:$V\rightarrow V$. Es decir, es una matriz del tipo:

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$$

donde una base de *V* es $B=\left\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}\right\}$, en la que, $\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}$ son los vectores característicos del operador *T* (columnas de la matriz *P*), definidos como:

$$\overline{v_1}=(p_{11},p_{21},...,p_{n1})$$
$$\overline{v_2}=(p_{12},p_{22},...,p_{n2})$$
$$\overline{v_n}=(p_{1n},p_{2n},...,p_{nn})$$

La relación que existe entre las dos matrices anteriores, *D* y *P*, se indica con el siguiente TEOREMA: Una matriz *A* de $n\times n$ asociada con el operador lineal T:$V\rightarrow V$, es "similar" a una matriz diagonal *D* si y sólo si existe un conjunto linealmente independiente (base de *V*) formado por *n* vectores característicos de *A*, los cuales constituyen las columnas de una matriz no singular *P* tal que:

$$D=P^{-1}\cdot A\cdot P$$

Cuando la expresión anterior se cumple, se dice que A es "diagonalizable".

Otras observaciones importantes que se relacionan con el teorema anterior, son:

1. Dos matrices representan al mismo operador lineal, si y sólo si son similares.
2. Si A y D son matrices similares, entonces:

   $$\det A = \det D$$

3. Dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores característicos.

En resumen, se puede decir que, para obtener la matriz diagonal de un operador lineal $T:V \rightarrow V$, sólo basta con determinar los valores y vectores característicos de dicho operador a partir de su matriz asociada A, y establecer si con los vectores característicos anteriores es posible obtener una base que indique la dimensión correcta del espacio vectorial V al que se refiere el operador en estudio. Si es así, las matrices diagonal D y diagonalizadora P se determinan como ya se indicó antes. En caso contrario, se dice que el operador no tiene una representación matricial diagonal.